Demostración de la afirmación 5

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] &= \lim_{x\to c}[f(x) + (-1)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c}(-1)g(x)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + (-1)\lim_{x\to c} g(x)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)\end{aligned}$$ ■

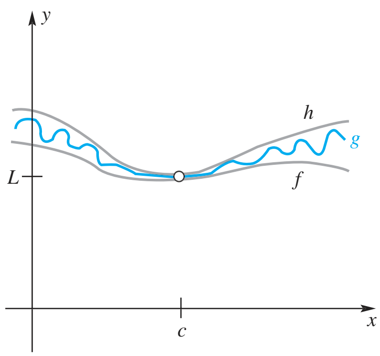

Figura 2

El teorema del emparedado Probablemente ha oído decir a alguien: "me encuentro entre la espada y la pared". Esto es lo que le sucede a g en el siguiente teorema (véase la figura 2).

Teorema D Teorema del emparedado

Sean f, g y h funciones que satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Demostración (Opcional) Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Elegimos δ_3, de modo que

$$0 < |x - c| < \delta_3 \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$$

Concluimos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$. ■

EJEMPLO 9 Suponga que hemos demostrado que $1 - x^2/6 \le (\text{sen } x)/x \le 1$ para toda x cercana pero distinta de cero. ¿Qué podemos concluir acerca de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}$?

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\text{sen } x)/x$, y $h(x) = 1$. Se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} h(x)$ y de este modo, por el teorema D,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1$$ ■

Revisión de conceptos

1. Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim_{x\to 3}(x^2 + 3)f(x) =$ _____.
2. Si $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to 2}\sqrt{g^2(x) + 12} =$ _____.
3. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f^2(x)}{g(x)} =$ _____ y $\lim_{x\to c}\left[g(x)\sqrt{f(x)} + 5x\right] =$ _____.
4. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c}[f(x) - L]g(x) =$ _____.

Conjunto de problemas 1.3

En los problemas del 1 al 12 utilice el teorema A para encontrar cada uno de los límites. Justifique cada paso apelando a cada una de las afirmaciones numeradas, como en los ejemplos del 1 al 4.

1. $\lim_{x\to 1}(2x + 1)$
2. $\lim_{x\to -1}(3x^2 - 1)$
3. $\lim_{x\to 0}[(2x + 1)(x - 3)]$
4. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[(2x^2 + 1)(7x^2 + 13)]$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x + 1}{5 - 3x}$
6. $\lim_{x\to -3}\frac{4x^3 + 1}{7 - 2x^2}$

7. $\lim_{x\to 3} \sqrt{3x - 5}$

8. $\lim_{x\to -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$

9. $\lim_{t\to -2} (2t^3 + 15)^{13}$

10. $\lim_{w\to -2} \sqrt{-3w^3 + 7w^2}$

11. $\lim_{y\to 2} \left(\dfrac{4y^3 + 8y}{y + 4}\right)^{1/3}$

12. $\lim_{w\to 5} (2w^4 - 9w^3 + 19)^{-1/2}$

En los problemas del 13 al 24 encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos casos, necesitará usar un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

14. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

15. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

17. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$

18. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 14x - 51}{x^2 - 4x - 21}$

21. $\lim_{u\to -2} \dfrac{u^2 - ux + 2u - 2x}{u^2 - u - 6}$

22. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + ux - x - u}{x^2 + 2x - 3}$

23. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{2x^2 - 6x\pi + 4\pi^2}{x^2 - \pi^2}$

24. $\lim_{w\to -2} \dfrac{(w + 2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los límites $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = -1$ *(véase el ejemplo 4).*

25. $\lim_{x\to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$

26. $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$

27. $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}\,[f(x) + 3]$

28. $\lim_{x\to a} [f(x) - 3]^4$

29. $\lim_{t\to a} [|f(t)| + |3g(t)|]$

30. $\lim_{u\to a} [f(u) + 3g(u)]^3$

En los problemas del 31 al 34 encuentre $\lim_{x\to 2} [f(x) - f(2)]/(x - 2)$ *para cada función f dada.*

31. $f(x) = 3x^2$

32. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

35. Demuestre la afirmación 6 del teorema A. *Sugerencia:*

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |g(x)[f(x) - L] + L[g(x) - M]| \\ &\le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M|\end{aligned}$$

Ahora demuestre que si $\lim_{x\to c} g(x) = M$, entonces existe un número δ_1, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < |M| + 1$$

36. Demuestre la afirmación 7 del teorema A; primero dé una demostración ε–δ de que $\lim_{x\to c} [1/g(x)] = 1/\left[\lim_{x\to c} g(x)\right]$ y luego aplique la afirmación 6.

37. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0$.

38. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

39. Demuestre que $\lim_{x\to c} |x| = |c|$.

40. Encuentre ejemplos para demostrar que si

(a) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$;

(b) $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$.

En los problemas del 41 al 48 encuentre cada uno de los límites unilaterales o establezca que no existen.

41. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{3 + x}}{x}$

42. $\lim_{x\to -\pi^+} \dfrac{\sqrt{\pi^3 + x^3}}{x}$

43. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

44. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{4 + 4x}$

45. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x^2 + 1)[\![x]\!]}{(3x - 1)^2}$

46. $\lim_{x\to 3^-} (x - [\![x]\!])$

47. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

48. $\lim_{x\to 3^+} [\![x^2 + 2x]\!]$

49. Suponga que $f(x)g(x) = 1$ para toda x y que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

50. Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{perímetro de } R}{\text{perímetro de } Q}$$

51. Sea $y = \sqrt{x}$ y considere los puntos M, N, O y P con coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ y (x, y) en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, respectivamente. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{perímetro de } \Delta NOP}{\text{perímetro de } \Delta MOP}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{área de } \Delta NOP}{\text{área de } \Delta MOP}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 48 **2.** 4 **3.** -8; $-4 + 5c$ **4.** 0

1.4 Límites que involucran funciones trigonométricas

El teorema B de la sección anterior dice que los límites de funciones polinomiales siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas. Este resultado se establece a continuación.